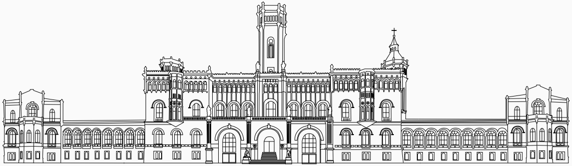
Dimensionstheorie

Seminar Kommutative Algebra

Leo Kayser

20. Juli 2020



Ein Apéritif

- Sei A ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$. Dann sind folgende Ausdrücke wohldefiniert, endlich und stimmen überein:
  - $\dim A = \sup \{ n \mid \text{es gibt Primideale } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subset A \}$;
  - $\delta(A) = \min \{ n \mid \text{es gibt ein } \mathfrak{m}\text{-primäres Ideal } (a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathfrak{m} \}$;
  - $d(A) = \deg \chi_{\mathfrak{m}}(A)$, wobei $\chi_{\mathfrak{m}}$ ein Polynom ist mit $\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \ell(A/\mathfrak{m}^n)$ für $n \gg 0$.
- Ist $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_n) \subset A$ Primideal in einem noetherschen Ring, so ist $\dim A_{\mathfrak{p}} \leq n$.
- Ist k ein Körper, so ist $\dim k[X_1, \ldots, X_n] = n$.
- Ist A eine nullteilerfreie endlich erzeugte k-Algebra, so ist

$$\dim A = \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Quot}(A) = \dim A/\mathfrak{p} + \dim A_{\mathfrak{p}} \qquad \forall \mathfrak{p} \text{ prim.}$$

Inhalt

Das Hilbertpolynom und $d_{gr}(A)$

Homogene Komponenten sind endlich erzeugt

Sei $A = \bigoplus_{n\geq 0} A^{(n)}$ ein noetherscher graduierter Ring

$\Longrightarrow$ endlich erzeugt über dem noetherschen Ring $A^{(0)}$ von $x_1, \ldots, x_s$ homogen.

Sei weiterhin $M = \bigoplus_{n\geq 0} M^{(n)}$ ein endlich erzeugter graduierter A-Modul.

Lemma 1 $A^{(n)}$ und $M^{(n)}$ sind endlich erzeugt als $A^{(0)}$-Moduln.

Beweis.

(i) $\mathcal{M}^{(n)} := \left\{ x_1^{e_1} \cdots x_s^{e_s} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{s} e_j \deg x_j = n \right\} \rightsquigarrow \left|\mathcal{M}^{(n)}\right| < \infty$ und $\langle \mathcal{M}^{(n)} \rangle_{A^{(0)}} = A^{(n)}$.

(ii) $M = \underbrace{Am_1 + \cdots + Am_t}_{\text{homogen, } \deg m_i = r_i} \rightsquigarrow A^{(n)} = \sum_{i=1}^{t} A^{n-r_i} m_i = \langle \{ x \cdot m_i \mid x \in \mathcal{M}^{(n-r_i)} \} \rangle_{A^{(0)}}$.

$\square$

Die Poincaré-Reihe

Sei C die Klasse der endlich erzeugten $A^{(0)}$-Moduln und $\lambda\colon \mathsf{C} \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion.

Beispiel

- $A^{(0)} = k$ ein Körper, $\lambda(V) = \dim_k V$.
- $A^{(0)}$ artinsch, $\lambda(N) = \ell(N)$ (Länge des Moduls).

Definition 2: (Poincaré-Reihe)

Die *Poincaré-Reihe* von M bezüglich λ ist die formale Potenzreihe

$$P(M,t) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M^{(n)}) t^n \in \mathbb{Z}[\![t]\!].$$

Die Poincaré-Reihe ist eine rationale Funktion

Satz 3: (Hilbert-Serre)

$P(M,t)$ ist eine rationale Funktion in t von der Form

$$P(M,t) = \frac{f(t)}{(1-t^{k_1})\cdots(1-t^{k_s})} \in \mathbb{Q}(t),$$

wobei $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ und $k_i := \deg x_i > 0$.

Beweis. Induktion über s, die Anzahl der Erzeuger von $A = A^{(0)}[x_1, \ldots, x_s]$.

Induktionsanfang $s = 0$: Dann ist $M^{(n)} = 0$ für $n \gg 0$, also bricht die Reihe $P(M,t)$ ab und ist ein Polynom in $\mathbb{Z}[t]$.

Induktionsschritt $s-1 \mapsto s$: Setze $A' := A^{(0)}[x_1, \dots, x_{s-1}] \subset A$.

Sei $\varphi :=$ „$\cdot x_s$“: $M \to M$ die Skalarmultiplikation mit x_s, $\varphi^{(n)} := \varphi_{|M^{(n)}}$. Wir haben

$$0 \longrightarrow K^{(n)} \hookrightarrow M^{(n)} \xrightarrow{\varphi^{(n)}} M^{(n+k_s)} \twoheadrightarrow L^{(n+k_s)} \longrightarrow 0, \tag{1}$$

$$K^{(n)} := \ker\left(\varphi^{(n)}\right) \subset M^{(n)},$$

$$L^{(n+k_s)} := \operatorname{coker}\left(\varphi^{(n)}\right) = M^{(n+k_s)} \big/ x_s M^{(n)}.$$

Setze

$$K := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} K^{(n)} = \ker \varphi \hookrightarrow M, \qquad L := \bigoplus_{n \geq k_s} L^{(n)} \hookrightarrow M \big/ x_s M,$$

dies sind endlich erzeugte graduierte A- und A'-Moduln.

Beweis von Satz 3 ii

Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir:

$$P(K,t) = \frac{f_K(t)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{k_i})}, \quad P(L,t) = \frac{f_L(t)}{\prod_{i=1}^{s-1}(1-t^{k_i})} \qquad f_K, f_L \in \mathbb{Z}[t]. \tag{2}$$

Wenden wir λ auf (1) an, so erhalten wir aus der Additivität [AM69, Proposition 2.11]

$$\lambda(K^{(n)}) - \lambda(M^{(n)}) + \lambda(M^{(n+k_s)}) - \lambda(L^{(n+k_s)}) = 0.$$

Diese Gleichung mit t^{n+k_s} multiplizieren und formal aufaddieren liefert

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(K^{(n)})t^{n+k_s}}_{=t^{k_s}\cdot P(K,t)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M^{(n)})t^{n+k_s}}_{=t^{k_s}\cdot P(M,t)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(M^{(n+k_s)})t^{n+k_s}}_{=P(M,t)-g(t)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda(L^{(n+k_s)})t^{n+k_s}}_{=P(L,t)} = 0,$$

wobei $g(t) = \sum_{n=0}^{k_s-1}\lambda(M^{(n)})t^n$ ein Polynom ist.

Beweis von Satz 3 iii

Also ist

$$t^{k_s}P(K,t) \; - \; t^{k_s}P(M,t) \; + \; P(M,t) - g(t) \; - \; P(L,t) = 0.$$

Umsortieren der Terme liefert

$$(1 - t^{k_s})P(M,t) = -t^{k_s}P(K,t) + P(L,t) + g(t).$$

Teilt man dies durch $1 - t^{k_s} \in \mathbb{Z}[\![t]\!]^\times$ und setzt die Darstellung aus (2) ein, erhält man

$$P(M,t) = \frac{-t^{k_s}P(K,t) + P(L,t) + g(t)}{1 - t^{k_s}} = \frac{f(t)}{(1 - t^{k_1}) \cdots (1 - t^{k_s})}.$$

$\square$

Das Hilbertpolynom

Satz 3 zeigt, dass $P(M,t)$ bei 1 eine Polstelle besitzen kann, und zwar von der Polordnung $\leq s$. Bezeichne diese mit $\boldsymbol{d_{gr}(M)} := -\operatorname{ord}_1(P(M,t))$.

Korollar 4: (Existenz des Hilbertpolynoms)

(i) Ist $k_i = \deg x_i = 1$ für alle i, so stimmt für hinreichend großes n die Folge $\lambda(M^{(n)})$ mit den Werten eines rationalen Polynoms $HP_M \in \mathbb{Q}[X]$ überein.

(ii) $\deg HP_M = d_{gr}(M) - 1$.

(iii) Ist $A^{(0)}$ artinsch und $\lambda = \ell$, so ist $d_{gr}(M) \geq 0$ für $M \neq 0$.

Das Polynom $HP_M(X)$ aus Korollar 4 ist das *Hilbertpolynom* von M (bzgl. λ).

Beweis. (i) Nach Satz 3 ist $\lambda(M^{(n)})$ der n-te Koeffizient in der Reihenentwicklung von $P(M,t) = f(t)(1-t)^{-s}$. Nach eventuellem Kürzen können wir $s = d := d_{gr}(M)$ und $f(1) \neq 0$ annehmen; schreibe $f(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i t^i$.

Fall 1: $d \leq 0$. Dann ist $P(M,t)$ schon ein Polynom, d.h. $\lambda(M^{(n)}) = 0$ für $n \gg 0$.
$\rightsquigarrow HP_M(n) = 0$.

Fall 2: $d > 0$. Die Potenzreihenentwicklung von $(1-t)^{-d}$ lautet

$$\frac{1}{(1-t)^d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+d-1}{d-1} t^n \in \mathbb{Z}[\![t]\!].$$

Die Faltung dieser Reihe mit $f(t)$ liefert an der n-ten Stelle

$$\lambda(M^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n-k+d-1}{d-1}.$$

Beweis von Korollar 4 ii

Da $a_i = 0$ für $i > N$, genügt es für $n \geq N$ die Summe bis N laufen zu lassen.

$$HP_M(n) := \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{n-k+d-1}{d-1} = \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{(n-k+d-1)\cdots(n-k+1)}{(d-1)!}$$

definiert also ein Polynom, welches mit $\lambda(M^{(n)})$ für $n \geq N$ übereinstimmt.

(ii) $\deg HP_M = d-1$, denn der Leitterm von HP_M (in n) ist

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{n^{d-1}}{(d-1)!} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k 1^k}{(d-1)!} \cdot n^{d-1} = \underbrace{\frac{f(1)}{(d-1)!}}_{\neq 0} n^{d-1}.$$

(iii) Angenommen $d_{gr}(M) < 0$, so wäre $P(M,t) \in \mathbb{Z}[t]$ mit $P(M,1) = 0 = \sum_n \ell(M^{(n)})$. Da $\ell \geq 0$, ist $\ell(M^{(n)}) = 0\ \forall n$, also $M^{(0)} = 0\ \forall n$, im Widerspruch zu $M \neq 0$. ↯ $\square$

Ein explizites Beispiel

Beispiel 5: (Das Hilbertpolynom von $R[X_1, \ldots, X_s]$)

Sei $R = A^{(0)}$ artinsch und $A = R[X_1, \ldots, X_s]$ der Polynomring in s Variablen. $A^{(n)}$ ist ein freier R-Modul mit Basis $\mathcal{M}^{(n)}$.

$$a_n := \left|\mathcal{M}^{(n)}\right| = \binom{n+s-1}{s-1} \quad \Longrightarrow \quad \ell(A^{(n)}) = \ell(R^{a_n}) = a_n \cdot \ell(R).$$

Poincaréreihe und Hilbertpolynom sind in diesem Fall

$$P(A,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(R)\binom{n+s-1}{s-1} t^n = \frac{\ell(R)}{(1-t)^s}, \qquad d_{gr}(A) = s,$$

$$HP_A(X) = \ell(R)\binom{X+s-1}{s-1} = \frac{\ell(R)}{(s-1)!}(X+s-1)\cdots(X+1).$$

Das charakteristische Polynom und $d(A)$

Wachstum von M/M_n

Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein noetherscher lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul.

Sei weiterhin $\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal und (M_n) eine stabile $\mathfrak{a}$-Filtration von M.

Ziel:

Satz 6: (Existenz des charakteristischen Polynoms)

(i) M/M_n hat endliche Länge für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(ii) Für $n \gg 0$ stimmt $\ell(M/M_n)$ mit einem rationalen Polynom $g(n)$ überein.
(iii) $\deg g(n)$ ist beschränkt durch die Länge jedes Erzeugendensystems von $\mathfrak{a}$.

Ein Hilfslemma

Lemma 7 (i) $G_{\mathfrak{a}}(A)$ ist noethersch und $G(M)$ endlich erzeugt über $G_{\mathfrak{a}}(A)$.

(ii) $G_{\mathfrak{a}}^{(0)}(A) = A/\mathfrak{a}$ ist ein artinscher lokaler Ring.

(iii) $G^{(n)}(M) = M_n/M_{n+1}$ hat endliche Länge als A-Modul.

(iv) Ist $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_s)$ und $\overline{x_i} := x_i + \mathfrak{a}^2 \in {}^{\mathfrak{a}}\!/\!_{\mathfrak{a}^2}$, so ist $G_{\mathfrak{a}}(A) = (A/\mathfrak{a})[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$.

Beweis. (i) [AM69, Proposition 10.22 (i) & (iii)]

(ii) $A/\mathfrak{a}$ ist noethersch und lokal. Da das Radikal mit Quotienten verträglich ist, gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m} \subset A \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{(0)} = \overline{\mathfrak{m}} \subset A/\mathfrak{a} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\mathfrak{m}}^n = (0)$$

für ein n. Nach [AM69, Proposition 6.8] ist A artinsch.

Beweis des Hilfslemmas

(iii) M_n/M_{n+1} ist ein endlich erzeugter A-Modul. Da (M_n) eine $\mathfrak{a}$-Filtration ist, ist

$$\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}_A(M_n/M_{n+1}) \quad \Longrightarrow \quad M_n/M_{n+1} \text{ ist } A/\mathfrak{a}\text{-Modul.}$$

Damit ist M_n/M_{n+1} endlich erzeugt über dem nach (ii) artinschen Ring $A/\mathfrak{a}$, besitzt also endliche Länge als $A/\mathfrak{a}$-Modul [AM69, Proposition 6.8], und damit auch als A-Modul.

(iv) folgt aus der Tatsache, dass

$$\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_s) \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{a}^n = \left(\{ x_1^{e_1} \cdots x_s^{e_s} \mid e_i \geq 0, \textstyle\sum_i e_i = n \} \right).$$

Daher wird $G^{(n)}(A) = {}^{\mathfrak{a}^n}\!/\!_{\mathfrak{a}^{n+1}}$ von den Monomen in $\overline{x_i}$ vom Grad n erzeugt. $\square$

Beweis von Satz 6: (i) M/M_n hat endliche Länge

Tatsächlich ist

$$\ell(M/M_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ell(M_k/M_{k+1}) < \infty; \tag{3}$$

wir beweisen diese Formel durch Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 0$: $M_0 = M \quad \Longrightarrow \quad \ell(M/M_0) = \ell(0) = 0 =$ „leere Summe".

Induktionsschritt $n \mapsto n+1$: Betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow M/M_n \longrightarrow M/M_{n+1} \longrightarrow M_n/M_{n+1} \longrightarrow 0.$$

Die äußeren beiden Moduln sind nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 7(iii) von endlicher Länge, und damit auch der Modul M/M_{n+1} in der Mitte.

(3) ergibt sich aus der Additivität von ℓ auf der kurzen exakten Sequenz.

Beweis von Satz 6: (ii) $\ell(M/M_n)$ ist Polynom für $n \gg 0$

Nach Lemma 7(iv) wird $G_{\mathfrak{a}}(A)$ als $A/\mathfrak{a}$-Algebra von endlich vielen homogenen Elementen $\overline{x_i} \in G_{\mathfrak{a}}^{(1)}(A)$ erzeugt. Nach Lemma 7(iii) nimmt ℓ auf den $G^{(n)}(M)$ endliche Werte an, sodass wir uns in der Situation des ersten Abschnitts wiederfinden.

Korollar 4 liefert die Existenz des Hilbertpolynoms $HP_{G(M)}$ mit

$$\ell(M_n/M_{n+1}) = HP_{G(M)}(n) \qquad n \gg 0.$$

Nach Gleichung (3) haben wir für $n \gg 0$

$$\ell(M/M_{n+1}) - \ell(M/M_n) = \ell(M_n/M_{n+1}) = HP_{G(M)}(n),$$

nach Lemma 1 des Spickzettels stimmt für $n \gg 0$ die Funktion $\ell(M/M_n)$ mit einem Polynom $g(n)$ vom Grad $\deg HP_{G(M)} + 1$ überein.

Beweis von Satz 6: (iii) $\deg g(n) \leq s$

Sei $\mathfrak{a}$ erzeugt von s Elementen, so ist $G_{\mathfrak{a}}(A)$ nach Lemma 7(iv) erzeugt von ihren Restklassen. Wir erhalten aus dem Satz von Hilbert-Serre die Abschätzung

$$\deg HP_{G(M)} \overset{\text{Kor. 4}}{=} d_{gr}(G(M)) - 1 \overset{\text{Satz 3}}{\leq} s - 1.$$

Somit erhalten wir für $g(n)$

$$\deg g(n) = \deg HP_{G(M)} + 1 \leq (s-1) + 1 = s. \qquad \square$$

Das charakteristische Polynom

Ist $(M_n) = (\mathfrak{a}^n M)$, so schreiben wir für das Polynom $g(n)$ aus Satz 6 $\chi_{\mathfrak{a}}^M(n)$.
Im Fall $M = A$ nennen wir $\chi_{\mathfrak{a}} := \chi_{\mathfrak{a}}^A$ das *charakteristische Polynom* von $\mathfrak{a}$.

Beispiel: ($A = \mathbb{Z}_{(p)}$) Dann ist $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}_{(p)}$. Da $\mathbb{Z}_{(p)}$ ein Hauptidealring ist, ist $p^n\mathbb{Z}_{(p)}/p^{n+1}\mathbb{Z}_{(p)}$ einfach, daher ist $\ell(\mathbb{Z}_{(p)}/\mathfrak{m}^n) = n = \chi_{\mathfrak{m}}(n)$.

Satz 8: (Unabhängigkeit von Filtration und Ideal)

(i) Grad und Leitkoeffizient von $g(n)$ in Satz 6 hängen nicht von der Wahl der stabilen $\mathfrak{a}$-Filtration (M_n) von M ab.
(ii) Der Grad von $\chi_{\mathfrak{a}}$ hängt nicht von der Wahl des $\mathfrak{m}$-primären Ideals $\mathfrak{a}$ ab.

Beweis von Satz 8

Beweis.

(i) Sei (M'_n) eine weitere stabile $\mathfrak{a}$-Filtration und $g'(n) = \ell(M/M'_n)$. Nach [AM69, Lemma 10.6] haben die Filtrationen beschränkte Differenz, d.h. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$M_{n-n_0} \subseteq M'_n \subseteq M_{n+n_0} \quad \Longrightarrow \quad g(n-n_0) \leq g'(n) \leq g(n+n_0) \qquad n \gg 0.$$

Da $g(n)$ und $g'(n)$ Polynome sind, stimmen Grad und Leitkoeffizient nach Lemma 2 des Spickzettels überein.

(ii) Es genügt zu zeigen, dass $\deg \chi_{\mathfrak{a}} = \deg \chi_{\mathfrak{m}}$. Da $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$, gibt es ein $r > 0$ mit

$$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{m}^r \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{m}^n \supseteq \mathfrak{a}^n \supseteq \mathfrak{m}^{rn} \quad \Longrightarrow \quad \chi_{\mathfrak{m}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{a}}(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}}(rn) \qquad n \gg 0.$$

Nach Lemma 2 des Spickzettels stimmen die Grade der Polynome überein. $\square$

$d(A)$

Definition 9: ($d(A)$)

Ist A ein noetherscher lokaler Ring, so sei $d(A) := \deg \chi_{\mathfrak{m}} \in \mathbb{N}_0$.

Bemerkung. Ist A eine graduierte $k = A^{(0)}$-Algebra endlich erzeugt von Elementen von Grad 1 und $\mathfrak{m} := A_+$, so ist $A/\mathfrak{m}^n \cong A_{\mathfrak{m}}/(\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})^n$, also tatsächlich $d(A_{\mathfrak{m}}) = d_{gr}(A)$.

Korollar 10: (d entspricht d_{gr})

$d(A) = \deg \chi_{\mathfrak{a}} = d_{gr}(G_{\mathfrak{a}}(A))$ für jedes $\mathfrak{m}$-primäre Ideal $\mathfrak{a}$.

Beweis. Satz 8(ii).

Der Abstiegsschritt

$x \in A$ heißt M-*regulär*, wenn „$\cdot x$“: $M \to M$ injektiv ist.

Satz 11

Sei $M' := M/xM$, dann ist

$$\deg \chi_{\mathfrak{a}}^{M'} \leq \deg \chi_{\mathfrak{a}}^{M} - 1.$$

Korollar 12: $(d(A/(x)) < d(A))$

Ist $x \in A$ kein Nullteiler, so ist $d(A/(x)) \leq d(A) - 1$.

Beweis. Setze $M = A$ in Satz 11 und nutze $d(A) := \deg \chi_{\mathfrak{a}}^{A}$. □

Beweis von Satz 11

Sei $N := xM \subseteq M$, dann ist $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M' \longrightarrow 0$ exakt.

Setze $N_n := N \cap \mathfrak{a}^n M$, so haben wir wie in Kapitel 10 die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \underbrace{N/N \cap \mathfrak{a}^n M}_{N/N_n} \longrightarrow M/\mathfrak{a}^n M \longrightarrow M'/\mathfrak{a}^n M' \longrightarrow 0.$$

Wendet man ℓ auf diese Sequenz an, erhält man ein Polynom

$$g(n) := \ell(N/N_n) = \chi_{\mathfrak{a}}^{M}(n) - \chi_{\mathfrak{a}}^{M'}(n) \qquad n \gg 0. \tag{4}$$

Nach [AM69, Theorem 10.9] ist (N_n) eine stabile $\mathfrak{a}$-Filtration von N; nach Satz 8 sind also Grad und Leitkoeffizient von $g(n)$ gleich denen von $\chi_{\mathfrak{a}}^{N} \overset{M \cong N}{=} \chi_{\mathfrak{a}}^{M}$.

Somit zeigt (4), dass der Grad von $\chi_{\mathfrak{a}}^{M'}$ nur echt kleiner sein kann als $\deg \chi_{\mathfrak{a}}^{M}$.

Der Hauptsatz der Dimensionstheorie und Anwendungen

Der Hauptsatz der Dimensionstheorie

Satz 13: (Hauptsatz der Dimensionstheorie)

In einem noetherschen lokalen Ring stimmen folgende Ausdrücke überein:

- $\dim A = \sup \{ n \mid \text{es gibt Primideale } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \subset A \}$;
- $\delta(A) = \min \{ n \mid \text{es gibt ein } \mathfrak{m}\text{-primäres Ideal } (a_1, \ldots, a_n) \subseteq \mathfrak{m} \}$;
- $d(A) = \deg \chi_{\mathfrak{a}}(A) =$ „Wachstumsordnung von $\ell(A/\mathfrak{a}^n)$, $n \to \infty$“, $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{m}$-primär.

Beweisstrategie: $\delta(A) \geq d(A) \geq \dim(A) \geq \delta(A)$.

„$\deg \ell(A/\mathfrak{a}^n) \leq \delta(A)$“ für jedes $\mathfrak{m}$-primäre $\mathfrak{a}$ haben wir in Satz 6 bewiesen, nach Satz 8 sind diese Grade alle gleich $d(A)$.

$\implies \delta(A) \geq d(A)$.

$d(A) \geq \dim A$

Beweis. Induktion nach $d = d(A)$.

Induktionsanfang $d = 0$: $\ell(A/\mathfrak{m}^n)$ wird konstant für $n \gg 0$, also $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ für ein n. Nach [AM69, Proposition 8.6] ist A artinsch, also $\dim A = 0$.

Induktionsschritt $d - 1 \mapsto d$: Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ eine Kette von Primidealen und $x \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$. Sei $A' := A/\mathfrak{p}_0$ und $x' := \overline{x} \in A'$. Dann ist A' nullteilerfrei und $x' \neq 0$, d.h.

$$d(A'/(x')) \overset{\text{Kor. 12}}{\leq} d(A') - 1$$

Ist $\mathfrak{m}' = {}^{\mathfrak{m}}\!/\!_{\mathfrak{p}_0}$ das maximale Ideal von A', so haben wir

$$\mathfrak{m}^n \subseteq \ker(A \twoheadrightarrow A'/\mathfrak{m}'^n) \quad \Longrightarrow \quad A/\mathfrak{m}^n \twoheadrightarrow A'/\mathfrak{m}'^n \quad \Longrightarrow \quad d(A) \geq d(A').$$

Dies zeigt $d(A'/(x')) \leq d - 1$. Die Bilder der $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r$ in $A'/(x')$ bilden eine echt aufsteigende Kette, nach Induktionsvoraussetzung ist $r - 1 \leq d - 1$, d.h. $r \leq d$.
Da die Kette beliebig war, folgt $\dim A \leq d$. $\square$

Primideale haben endliche Höhe

Definition 14: (Höhe eines Ideals)

Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Wir definieren die *Höhe*

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) := \sup \{ n \mid \text{es gibt Primideale } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \} = \dim A_{\mathfrak{p}}.$$

Ist $\mathfrak{a} \subsetneq A$ ein beliebiges Ideal, so definiere $\operatorname{ht}(\mathfrak{a}) := \min \{ \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \text{ prim} \}$.

Korollar 15: (Noethersche lokale Ringe sind endlichdimensional)

(i) Noethersche lokale Ringe haben endliche Dimension.
(ii) Primideale in noetherschen Ringen haben endliche Höhe und erfüllen die **dcc**.

Der Krullsche Höhensatz

Satz 16: (Krullscher Höhensatz)

Sei A ein noetherscher Ring, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r) \subset A$ ein Ideal und $\mathfrak{p}$ ein Primideal minimal über $\mathfrak{a}$. Dann ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$.

Beweis. Lokalisiere A an $\mathfrak{p}$, so ist das maximale Ideal $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ immernoch minimal über $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}} = (\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_r}{1})$. Daher ist $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ $\mathfrak{m}$-primär, also

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}) \leq d(A_{\mathfrak{p}}) \leq \delta(A_{\mathfrak{p}}) \leq r.$$

□

Für die verbleibende Ungleichung verwenden wir:

Satz 17: (Eine Umkehrung des Höhensatzes)

Sei R ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe n. Dann gibt es $a_1, \dots, a_n \in A$, sodass $\mathfrak{p}$ minimal über $(a_1, \dots, a_n)$ ist.
Insbesondere ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \min \{ n \mid \exists a_1, \dots, a_n;\ \mathfrak{p} \text{ gehört zu } (a_1, \dots, a_n) \}$.

Beweis von $\dim(A) \geq \delta(A)$. Ist A ein noetherscher lokaler Ring und $\mathfrak{p} := \mathfrak{m}$, so garantiert Satz 17 ein Ideal

$$\mathfrak{a} = (a_1 \dots, a_n), \qquad n = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \dim A,$$

sodass $\mathfrak{m}$ minimal über $\mathfrak{a}$ ist. Da A lokal ist, ist $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{m}$-primär, also $\delta(A) \leq \dim(A)$. □

Der Hauptsatz der Dimensionstheorie ist bewiesen! ☺

Beweis von Satz 17

Ziel: Konstruiere rekursiv $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{p}$, sodass

$$\operatorname{ht}((a_1, \ldots, a_k)) = k \quad \forall k \leq n,$$

denn dann ist wegen $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \operatorname{ht}(\mathfrak{a}) = n$ $\mathfrak{p}$ minimal über $\mathfrak{a}$.

Sei $\mathfrak{a}' := (a_1, \ldots, a_{k-1})$ bereits konstruiert und betrachte die endliche (!) Menge

$$\mathcal{Q} := \{\, \mathfrak{q} \text{ prim} \mid \mathfrak{q} \text{ minimal über } \mathfrak{a}' \,\}\,.$$

Nach dem Höhensatz ist $k-1 = \operatorname{ht}(\mathfrak{a}') \overset{\text{def}}{\leq} \operatorname{ht}(\mathfrak{q}) \overset{\text{Höh.}}{\leq} k-1$ für alle $\mathfrak{q} \in \mathcal{Q}$, also $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) = k-1$.

Insbesondere ist $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathfrak{q}$; nach [AM69, Prop. 1.11 (*prime avoidance*)] gibt es also ein $a_k \in \mathfrak{p}$ mit $a_k \notin \mathfrak{q}\ \forall \mathfrak{q} \in \mathcal{Q}$. Setze $\mathfrak{a} := (a_1, \ldots, a_k)$. Jedes Primideal $\mathfrak{Q} \supseteq \mathfrak{a}$ enthält eines der $\mathfrak{q}$, da $a_k \in \mathfrak{Q} \setminus \mathfrak{q}$, ist die Inklusion echt, d.h.

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{a}) \geq \operatorname{ht}(\mathfrak{a}') + 1 = k \overset{\text{Höh.}}{\geq} \operatorname{ht}(\mathfrak{a}) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{ht}(\mathfrak{a}) = k. \qquad \square$$

Krulls Hauptidealsatz

Satz 18: (Krulls Hauptidealsatz)

Sei A ein noetherscher Ring und $x \in A$ weder Nullteiler noch Einheit. Dann hat jedes zu (x) gehörige Primideal Höhe 1.
Insbesondere gilt dies für (x) selbst, wenn (x) prim ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{p}$ so ein Primideal, nach dem Höhensatz ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$.

Angenommen $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, so ist $\mathfrak{p}$ zu (0) gehörig, besteht also nach [AM69, Proposition 4.7] aus Nullteilern, im Widerspruch zu $x \in \mathfrak{p}$. $\lightning$ $\square$

Reguläre lokale Ringe

Definition 19: (Regulärer lokaler Ring, [AM69, Thm. 11.22])

Ein *regulärer* lokaler Ring A erfüllt einer der folgenden äquivalenten Aussagen:

(i) $\mathfrak{m}$ kann von $d := \dim A$ Elementen erzeugt werden;

(ii) $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = d$, wobei $k := A/\mathfrak{m}$;

(iii) $G_{\mathfrak{m}}(A) \cong k[X_1, \ldots, X_d]$ (der Polynomring in d unabhängigen Variablen).

Satz 20: (Eigenschaften regulärer lokaler Ringe)

Ist A ein regulärer lokaler Ring, so ist A notwendigerweise **nullteilerfrei**, **ganzabgeschlossen** im Quotientenkörper [Kem11, Corollary 3.16], und sogar ein **faktorieller Ring** (Auslander-Buchsbaum-Theorem).

Beispiel 21 Sei A ein noetherscher lokaler Ring.

- Ist $\dim(A) = 0$, so ist A genau dann regulär, wenn A ein Körper ist.
- Ist $\dim(A) = 1$, so ist A genau dann regulär, wenn A ein diskreter Bewertungsring ist.
- In $\dim(A) \geq 2$ gibt es normale noethersche lokale Integritätsringe, welche nicht regulär sind, zum Beispiel $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(Z^2 - XY)_{(\overline{X},\overline{Y},\overline{Z})}$.

Hintergrund: Sei k algebraisch abgeschlossen, $\mathfrak{p} = (f_1, \dots, f_m) \subset k[X_1, \dots, X_n]$ ein Primideal, und $R = k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{p}$.

Sei $P \in V(\mathfrak{p}) \subseteq k^n$ ein Punkt und $\mathfrak{m} = (\overline{X_1} - P_1, \dots, \overline{X_n} - P_n) \subset R$ maximal:

$$R_{\mathfrak{m}} \text{ regulär} \overset{\text{[Gat02, Prop. 4.4.8]}}{\iff} \operatorname{Rang}\left[\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(P)\right]_{ij} \geq \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \overset{?}{=} n - \dim R.$$

Affine k-Algebren

Satz 22: (Dimension des Polynomrings)

Sei k ein Körper und $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist $\dim A = n$.

Beweis. $\dim A \geq n$, denn wir haben eine aufsteigende Primidealkette

$$(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \ldots, X_n).$$

Sei zunächst k algebraisch abgeschlossen. Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_r \subset A$ eine Kette von Primidealen, oBdA sei $\mathfrak{p}_r = \mathfrak{m}$ maximal. Nach Hilberts Nullstellensatz ist $\mathfrak{m}$ von der Gestalt

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n), \qquad a_i \in k.$$

Nach dem Höhensatz ist $r \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{m}) \overset{\text{Höh.}}{\leq} n$, also $\dim A \leq n$. ($\square$)

Den allgemeinen Fall folgern wir aus folgendem Satz:

Ganze Erweiterungen und Dimension

Satz 23: (Dimension und Höhe sind mit ganzen Erweiterungen verträglich)

Seien $A \subseteq B$ Ringe, B ganz über A und $\mathfrak{P} \subset B$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$ prim.

(i) Es gilt $\dim B = \dim A$, und $\dim B/\mathfrak{P} = \dim A/\mathfrak{p}$.

(ii) Sind A und B nullteilerfrei und A normal, so ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.

Beweis.

Der Transzendenzgrad

Ist K/k eine Körpererweiterung, so ist $\operatorname{trdeg}_k(K) = n$, falls es über k algebraisch unabhängige Elemente $x_1, \ldots, x_n \in K$ gibt, sodass $K/k(x_1, \ldots, x_n)$ algebraisch ist.

Satz 24: ($\dim A = \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Quot}(A)$)

Sei A eine nullteilerfreie affine k-Algebra. Dann ist $\dim A = \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Quot}(A)$.

Beweis. Nach Noether-Normalisierung [AM69, Exercise 5.16] gibt es k-algebraisch unabhängige Elemente $X_1, \ldots, X_d \in A$, sodass

$$k \subset k[X_1, \ldots, X_d] = C \subset A, \qquad A/C \text{ ganz.}$$

$$\implies \operatorname{Quot}(A)/\operatorname{Quot}(C) = k(X_1, \ldots, X_d) \text{ algebraisch, } \operatorname{trdeg}_k \operatorname{Quot}(A) = d.$$

Andererseits ist $\dim A \overset{\text{ganz}}{=} \dim C = \dim k[X_1, \ldots, X_d] \overset{\text{Satz 22}}{=} d.$ □

Affine k-Algebren haben schöne Ketteneigenschaften

Satz 25: (Maximalen Ketten haben gleiche Länge)

Sei A eine affine k-Algebra.

(i) $\dim A < \infty$; beschränkt durch die Anzahl der Erzeuger als k-Algebra.

(ii) Sei

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$$

eine (inklusions)maximale Kette von Primidealen, so ist $n = \dim A/\mathfrak{p}_0$.

Beweis.

(i) Nach Definition ist A von der Gestalt $A \cong k[X_1, \ldots, X_n]/I$. Da die Dimension des Polynomrings n ist, folgt die Behauptung.

Beweis von Satz 25 i

(ii) Sei $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ eine maximale Kette. Indem wir A durch $A/\mathfrak{p}_0$ ersetzen, können wir A als nullteilerfrei annehmen. Wir führen Induktion nach n.

Induktionsanfang $n = 0$: Dann ist (0) maximal, also $\dim A/\mathfrak{p}_0 = 0$.

Induktionsschritt $n - 1 \mapsto n$: Die Bilder ${}^{\mathfrak{p}_1}\!/\!_{\mathfrak{p}_1} \subsetneq \cdots \subsetneq {}^{\mathfrak{p}_1}\!/\!_{\mathfrak{p}_n}$ in $A/\mathfrak{p}_1$ bilden ebenfalls eine maximale Kette; nach Voraussetzung ist $\dim A/\mathfrak{p}_1 = n - 1$. Es genügt also zu zeigen

$$\dim A/\mathfrak{p}_1 = \dim A - 1.$$

Nach Noether-Normalisierung gibt es einen Polynomring

$$k \subset k[X_1, \ldots, X_d] = C \subset A, \qquad A/C \text{ ganz}.$$

Da C als faktorieller Ring ganzabgeschlossen ist, folgt

$$1 = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_1) \overset{\text{ganz}}{=} \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_1 \cap C).$$

Beweis von Satz 25 ii

Sei $0 \neq f \in \mathfrak{p}_1 \cap C$, und $p \mid f$ ein irreduzibler Faktor in $\mathfrak{p}_1 \cap C$ (C ist faktoriell). Wegen $\mathrm{ht}((p)) = 1$ ist bereits $(p) = \mathfrak{p}_1 \cap C$.

ObdA komme X_d in p vor, dann sind die Restklassen der X_i

$$S := \{\overline{X_1}, \dots, \overline{X_{d-1}}\} \subset \mathrm{Quot}(C/(p))$$

maximal algebraisch unabhängig, also $\mathrm{Quot}(C/(p))$ algebraisch über $k(S)$.

Daher ist

$$\dim A - 1 \overset{\text{ganz}}{=} d - 1 = \operatorname{trdeg}_k \mathrm{Quot}(C/(p)) \overset{\text{Satz 24}}{=} \dim C/(p) \overset{\text{ganz}}{=} \dim A/\mathfrak{p}_1 \qquad \square$$

Die Dimensionsformel

Korollar 26: (Die Dimensionsformel)

Ist A eine nullteilerfreie affine k-Algebra, und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal von A, so ist

$$\dim A/\mathfrak{p} + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim A.$$

Insbesondere ist $\mathrm{ht}(\mathfrak{m}) = \dim A$ für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m} \subset A$.

Korollar 27: (Hyperflächen haben Kodimension 1)

Sei $p \in k[X_1, \ldots, X_n]$ irreduzibel, so ist

$$\dim k[X_1, \ldots, X_n]/(p) = n - 1.$$

Beweis der Dimensionsformel

Beweis. Sei also A nullteilerfrei und $\mathfrak{p} \subset A$ prim. Sei

$$(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_k = \mathfrak{p} \subset A$$

eine Kette der Länge $k = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$. Sei weiterhin

$$(0) = \mathfrak{P}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_l \subset A/\mathfrak{p} = \mathfrak{M}$$

eine Kette der Länge $l = \dim A/\mathfrak{p}$.

Seien $\mathfrak{p}_{k+i} := \pi^{-1}(\mathfrak{P}_i)$ die Urbilder unter der kanonischen Projektion $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$.

$$(0) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_k = \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_{k+1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{k+l} = \mathfrak{m}$$

ist nach Konstruktion eine maximale Kette von Primidealen, nach Satz 25 ist

$$\dim A = k + l = \operatorname{ht}\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p}. \qquad \square$$

Quellenverweise

[AM69] Michael F. Atiyah und Ian G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra.* Reading, Mass: Addison-Wesley Pub. Co, 1969. ISBN: 0201003619.

[Gat02] Andreas Gathmann. *Algebraic Geometry.* 2002. URL: https://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2002/alggeom-2002.pdf.

[Kem11] Gregor Kemper. *A Course in Commutative Algebra.* Springer Berlin Heidelberg, 2011. DOI: 10.1007/978-3-642-03545-6.