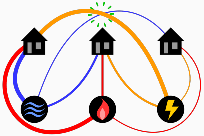
Die Euler-Charakteristik

Von unplättbaren Graphen und anderen Welten

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR MATHEMATIK
IN DEN NATURWISSENSCHAFTEN

Leonie Kayser
kayser@mis.mpg.de
26. März 2025

$$\chi = E - K + F$$



Zur Person

- Masterstudium in Mathematik und Informatik in Hannover
- Doktorandin in der *Numerical Algebraic Geometry Group* seit 2023
- Forschung zu *Projektiver Algebraischer Geometrie*
- Homepage `leokayser.github.io`

Abbildung 1: Ich mit Doktorvater Simon Telen (rechts) und Mentor Fulvio Gesmundo (Mitte).

Graphen in der Kombinatorik

- Ein *Graph* ist eine Menge von Knoten/*Ecken* E, die mittels einer Menge von *Kanten* K verbunden sind
- Abstrakt: Liste von Ecken $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und Kanten $\{\,\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\,\}$
- Konkret: Zeichne die Ecken E in die Ebene und zeichne alle Kanten K ein
- Vielfältige Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik, wann immer Netzwerke oder Abhängigkeiten modelliert werden müssen

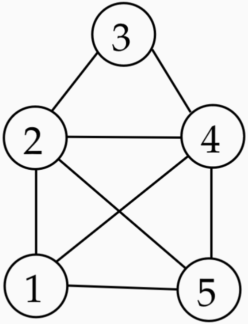


Abbildung 2: Ein Graph mit 5 Ecken und 8 Kanten.

Planare Graphen und die Euler-Charakteristik

- Ein Graph heißt *planar*, wenn er in die Ebene gezeichnet werden kann, ohne dass sich zwei Kanten überkreuzen
- Die von einem planaren Graphen abgegenzten Gebiete, inklusive des äußeren, heißen *Flächen*
- Die *Euler-Charakteristik* eines planaren Graphens ist

$$\chi = E\text{cken} - K\text{anten} + F\text{lächen}$$

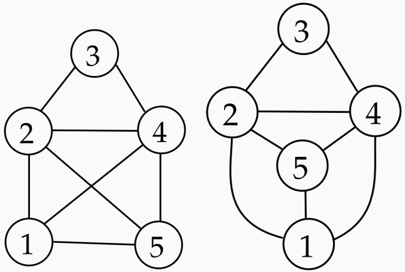
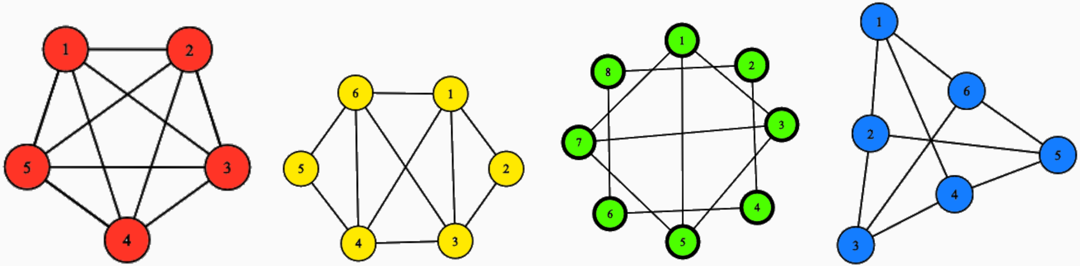


Abbildung 3: Derselbe Graph in einer planaren Darstellung

Rätselrunde die erste!

$$\chi = E\text{cken} - K\text{anten} + F\text{lächen}$$

- Welche der folgenden Graphen sind planar?
- Falls ja, was ist die Euler-Charakteristik? Falls nein, warum nicht?



Ecken und Kanten bestimmen die Flächen!

Satz (Eulerformel)

Für jeden zusammenhängenden planaren Graphen gilt

$$\chi = E - K + F = 2,$$

unabhängig von der ebenen Darstellung.

- Die Formel ist wahr für einen einzelnen Knoten: $E = F = 1$, $K = 0$ ✓
- Fügt man eine Ecke hinzu und verbindet sie mit einer vorhandenen Ecke, so ist $E_{\text{neu}} = E + 1$, $K_{\text{neu}} = K + 1$, $F_{\text{neu}} = F$ ✓
- Fügt man eine Kante zwischen zwei bestehenden Ecken ein, so teilt diese eine vorhandene Fläche in zwei neue: $E_{\text{neu}} = E$, $K_{\text{neu}} = K + 1$, $F_{\text{neu}} = F + 1$ ✓
- Diese Operationen lassen die Euler-Charakteristik unverändert
- Man kann auf diese Weise jeden zusammenhängenden Graphen aufbauen

Das Wasser-Gas-Strom-Rätsel

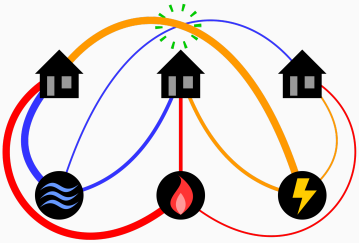


Abbildung 4: Verbinde die Häuser mit den Versorgungsstellen, ohne dass sich Leitungen kreuzen.

Angenommen, es gäbe eine Lösung.

- $E = 6, K = 9$. Nach der Eulerformel ist $F = K - E + 2 = 5$
- Jede Fläche grenzt an *mindestens* vier Kanten, jede Kante an genau zwei Flächen

$\rightsquigarrow$ Es müsste mindestens doppelt so viele Kanten wie Flächen geben, ein Widerspruch! $\lightning$

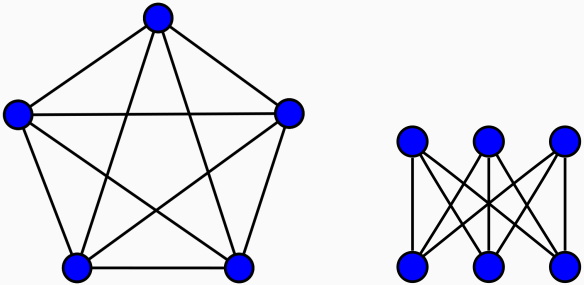


Abbildung 5: Die zwei kleinsten nicht-planaren Graphen K_5 und $K_{3,3}$.

Satz (Kuratowski)

Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung der Graphen K_5 oder $K_{3,3}$ enthält.

Auf in die dritte Dimension!

- Ein *Polyeder* ist ein dreidimensionaler Körper, der von ebenen Vielecken begrenzt wird.
- Ein Polyeder hat ebenfalls Ecken, Kanten und Flächen
- Ein Polyeder ist konvex, falls jeder Innenpunkt jeden Punkt auf der Oberfläche „sieht" (Gegenbeispiel: Dodekaederstern)
- Die Euler-Charakteristik ist wieder definiert als

$$\chi = E - K + F$$

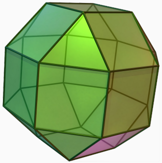


Abbildung 6: Ein Rhombenkuboktaeder.

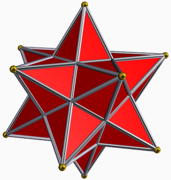


Abbildung 7: Ein Dodekaederstern.

Rätselrunde die zweite!

- Finde die Euler-Charakteristiken der vorliegenden Körper und des Dodekaedersterns!
- Gibt es einen Zusammenhang zu planaren Graphen?

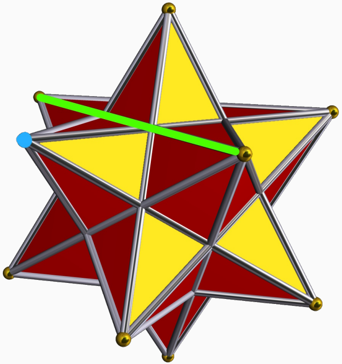


Abbildung 8: Der Dodekaederstern mit Ecke (blau), Kante (grün) und Fläche (gelb).

Schon wieder 2?

Satz (Eulersche Polyederformel)

Für jeden konvexen Polyeder gilt $\chi = E - K + F = 2$.

- Öffne den Polyeder in einer Fläche und falte zum *Schlegeldiagramm* in der Ebene auf
- So entsteht ein planarer Graph, für den die Eulerformel schon gezeigt ist!

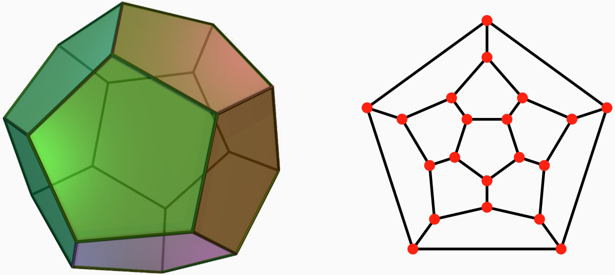


Abbildung 9: Der Dodekaeder und sein Schlegeldiagramm in der Ebene

Genug mit Ecken und Kanten!

- Eine orientierbare Fläche hat genau zwei Seiten (Gegenbeispiel: Möbiusband)
- Das *Geschlecht* einer orientierbaren Fläche ist die Anzahl der „Löcher"
- Eine geschlossene Fläche ist eine Fläche ohne Rand
- Die *Topologie* geschlossener orientierter Flächen wird bestimmt durch ihr Geschlecht, genauer: Je zwei Flächen gleichen Geschlechts sind *homöomorph* (strukturell gleich)

Abbildung 10: Flächen vom Geschlecht 0 (Sphäre), 1 (Torus) und höher.

Die Euler-Charakteristik geschlossener Flächen

- Jede glatte Fläche S besitzt eine *Triangulierung*, d.h. eine Überdeckung mit einem Netz aus (gerundeten) Dreiecken
- Die Euler-Charakteristik der Fläche ist definiert als $\chi(S) = E - K + F$, wobei E, K, F die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen in einer Triangulierung ist
- Dies ist unabhängig von der gewählten Triangulierung (warum?)
- Die Euler-Charakteristik ändert sich nicht, wenn man auch andere Vielecke zulässt

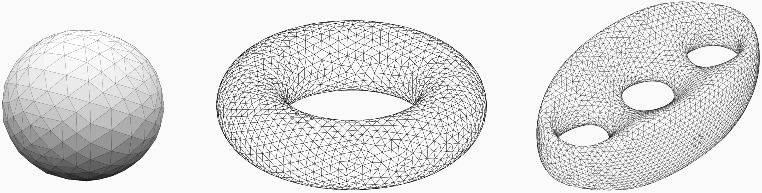
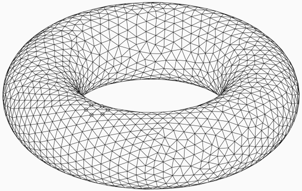


Abbildung 11: Triangulierte Flächen von Geschlecht 0 (Sphäre), 1 (Torus) und 3 (Brezel?).

Rätselrunde die dritte!

- Die eulersche Polyederformel verrät uns, dass für die Sphäre $\chi(\mathbb{S}) = 2$ gilt
- Was ist die Euler-Charakteristik des Torus $\chi(\mathbb{T})$?
- Was ist die Euler-Charakteristik einer Fläche von Geschlecht g?



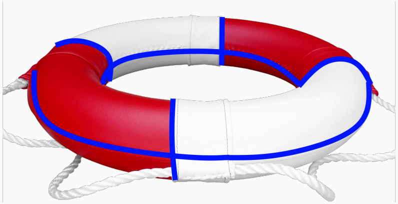


Abbildung 12: Ein Torus $\mathbb{T}$ und ein markierter Rettungsring.

Wenn die Welt doch nur ein Donut wäre...

- Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar, sie können jedoch kreuzungsfrei auf einen Torus gezeichnet werden
- Tatsächlich ist dies sogar möglich für K_7 und $K_{4,4}$!

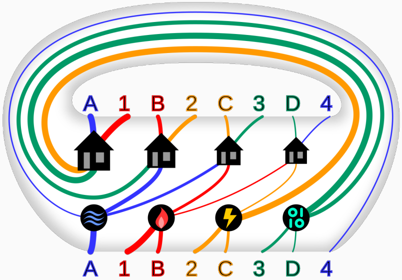


Abbildung 13: Vier Häuser überkreuzungsfrei mit vier Ressourcen versorgt auf einem Torus.

Satz (Vierfarbensatz)

Jede Landkarte mit zusammenhängenden Ländern kann mit vier Farben gefärbt werden, sodass benachbarte Länder verschiedene Farben haben.

- Erster mathematischer Satz, der mit Computerhilfe bewiesen wurde (Appel & Haken 1976)
- Für Landkarten auf Welten mit höherem Geschlecht können mehr Farben nötig sein, beim Torus bis zu 7
- Die höchste Mindestanzahl hängt von der Euler-Charakteristik von S ab und beträgt

$$\left\lfloor \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(S)}}{2} \right\rfloor$$

Abbildung 14: 7 Länder auf einem Torus, die alle aneinandergrenzen.

Ausblick

- Die Geometrie auf einer Fläche hängt wesentlich von der Euler-Charakteristik ab
  - $\chi > 0$: Sphäre, „positive Krümmung“
  - $\chi = 0$: Torus, „keine Krümmung“
  - $\chi < 0$: Hyperboloid/Pringles, „negative Krümmung“
- Die Euler-Charakteristik erklärt, warum ein Kernfusionsreaktor ein Torus sein *muss*
- Die Eulerformel ist ein Hilfsmittel in der Computergrafik, um besser mit Triangulierungen rechnen zu können
- In der Chemie und Biologie kann die Stabilität von Molekülen mittels der Eulerformel untersucht werden

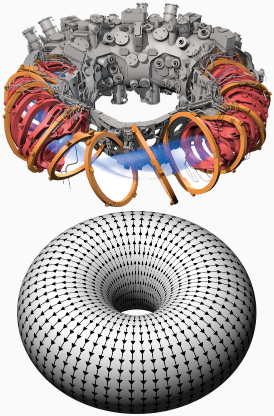


Abbildung 15: Ein Fusionsreaktor und sein Magnetfeld.

Danke! Fragen?

BONUS: Warum gibt es eigentlich nur fünf platonische Körper?

- Die Flächen platonischer Körper sind p-Ecke, und es treffen sich q an jeder Ecke
- An jeder Ecke zählen wir $qE = 2K$
- An den Flächen zählen wir $pF = 2K$
- Einsetzen in die Polyederformel: $\frac{2K}{q} + K + \frac{2K}{p} = 2$
- Umstellen liefert die Ungleichung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{K} > \frac{1}{2}$$

- Die einzigen ganzzahligen Lösungen der Ungleichung sind die fünf Körper

Name	Tetraeder	Oktaeder	Ikosaeder	Würfel	Dodekaeder
p-Ecke	3	3	3	4	5
q an Ecke	3	4	5	3	3
E, K, F	$4, 6, 4$	$6, 12, 8$	$12, 30, 20$	$8, 12, 6$	$20, 30, 12$