

Stabilität von Kurven

Leo Kayser

Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Kriterien für die Stabilität von Hilbertpunkten | 2 |
| 1.1 | Konstruktion des Hilbertschemas | 2 |
| 1.2 | Gewichtete Basen und Filtrationen | 4 |
| 1.3 | Das numerische Kriterium für Hilbertpunkte | 5 |
| 1.4 | Asymptotische Hilbert-Stabilität | 7 |
| 2 | Giesekeers Kriterium | 9 |
| 2.1 | Die d -Invarianten einer Filtration | 9 |
| 2.2 | Das Kriterium von Giesekeer | 10 |
| 3 | Die Stabilität glatter Kurven | 13 |
| | Literatur | 16 |

1 Kriterien für die Stabilität von Hilbertpunkten

1.1 Konstruktion des Hilbertschemas

Sei $P(m)$ ein numerisches Polynom und $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{P(m),r}$ das dazugehörige Hilbertschema. \mathcal{H} parametrisiert die abgeschlossenen Unterschemata von $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$ mit Hilbertpolynom $P(m) = h^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ ($m \gg 0$).

Etwa für $P(m) = dm + (1 - g)$ parametrisiert

$$\mathcal{H}_{d,g,r} := \mathcal{H}_{P(m),r} \hat{=} \{ \text{projektive Kurven } C \subset \mathbb{P}^r \text{ mit } g(C) = g \text{ und Grad } d \}.$$

Wir erinnern kurz an die Konstruktion des Hilbertschemas. Die Strategie in [HM98, Abschnitt 1.B] (und auch Lucas' Vortrag) war die Folgende:

- Für festes P existiert ein m_0 , sodass für alle $m \geq m_0$ und alle Unterschemata $X \subseteq \mathbb{P}^r$ mit Hilbertpolynom P gilt $h^0(X, \mathcal{O}_X(m)) = P(m)$, und die Einschränkung von homogenen Polynomen definiert eine Surjektion

$$\varphi_m: S_m := \mathbb{C}^{(m)}[x_0, \dots, x_r] \twoheadrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)).$$

- Die **Grassmann'sche** $\mathcal{G} = \mathbf{Gr}(P(m), S_m)$ parametrisiert die Unter- bzw. Quotientenräume von S_m von Dimension $P(m)$.
- X wird mit dem Quotienten $[X]_m \hat{=} \varphi_m$ identifiziert; dies ist eindeutig und wird als der m -te **Hilbertpunkt** von X bezeichnet.
- Identifiziere \mathcal{H} als abgeschlossenes Unterschema von \mathcal{G} .

Die Grassmann'sche ist eine projektive Varietät, wir interessieren uns für eine besondere nützliche Einbettung in einen projektiven Raum.

Definition 1: (Plücker-Einbettung, Plückerkoordinaten)

Ist S ein Vektorraum, $0 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}} S$, dann erhalten wir eine Einbettung

$$\iota: \mathbf{Gr}(k, S) \hookrightarrow \mathbb{P}(\wedge^k S), \quad \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{C}} \mapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_k].$$

Das Produkt $Z = v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ sind die **Plückerkoordinaten**.

Ist $Z \in \wedge^k S$, so ist die Koordinate auf $(\varphi: S \twoheadrightarrow Q) \in \mathcal{G} \subseteq \mathbb{P}(\wedge^k S)$ genau dann ungleich 0, wenn $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_k)$ eine Basis von Q bildet.

Die Gruppe $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{P}^r = \mathbb{P}(V)$, $V = \mathbb{C}^{r+1}$, und damit auf \mathcal{H} . Wir wollen das numerische Kriterium auf diese Operation anwenden:

Eine **1-Parameter-Untergruppe** von G ist ein nicht-konstanter Gruppenmorphismus $\lambda: \mathbb{C}^{\times} \rightarrow G$. Das numerische Kriterium besagt, dass man (Semi)Stabilität von Punkten bezüglich der Operation von G auf \mathbb{P}^r mittels 1-Parameter-Untergruppen testen kann (Satz 6 unten). Dies wollen wir im Folgenden ausführen.

Fixiere eine 1-Parameter-Untergruppe $\lambda: \mathbb{C}^{\times} \rightarrow G$ und wähle homogene Koordinaten $B = B_{\lambda} = \{x_0, \dots, x_r\}$ des \mathbb{P}^r (aufgefasst als Basis von V^{\vee}), bezüglich derer die Wirkung die Form

$$\lambda(t) = \mathrm{diag}(t^{w_0}, \dots, t^{w_r}), \quad w_i \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{i=0}^r w_i = 0$$

hat. Eine Basis von $\text{Sym}^m(V^\vee)$ ($m \in \mathbb{N}$) ist gegeben durch die Monome

$$B_m = \{ Y = x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r} \mid \sum_i m_i = m \}.$$

Fixiere ein (hinreichend großes) m und sei

$$W := \bigwedge^{P(m)} \text{Sym}^m(V^\vee).$$

Wie im ersten Abschnitt dargestellt, liegt das Hilbertschema \mathcal{H} nach unserer Konstruktion in der Grassmann'schen \mathcal{G} , welche wiederum eingebettet ist in $\mathbb{P}(W)$:

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \xrightarrow{\iota} \mathbb{P} \left(\bigwedge^{P(m)} \text{Sym}^m(V^\vee) \right).$$

Eine Basis von W (die **Plückerbasis**) ist gegeben durch ungeordnete $p := P(m)$ -Tupel

$$\{ Z = \{Y_{j_1}, \dots, Y_{j_p}\} \mid Y_{j_k} \in B_m \}.$$

Lemma 2 Die auf $\text{Sym}^m(V^\vee)$ und auf W induzierte Operation von λ hat bezüglich der angegebenen Basen ebenfalls Diagonalgestalt.

Beweis. Wir rechnen nach. Mit $w(Y) := \sum_{i=0}^r w_i m_i$ und $w(Z) := \sum_{k=1}^p w(Y_{j_p})$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda(t) \cdot Y &= (t^{w_0} x_0)^{m_0} \cdots (t^{w_r} x_r)^{m_r} = t^{w_Y} \cdot x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r} = t^{w(Y)} Y, \\ \lambda(t) \cdot Z &= (t^{w(Y_{j_1})} Y_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (t^{w(Y_{j_p})} Y_{j_p}) = t^{w(Z)} Z. \end{aligned} \quad \square$$

Lemma 3: Monomielle Basen

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^r$ ein Unterschema mit Hilbertpolynom $P(m)$, $[X]_m \in \mathcal{G}$ der zugehörige Hilbertpunkt. Dann verschwindet die Koordinate Z nicht auf $[X]$ genau dann, wenn die $Y_{j_k}|_X$ eine Basis von $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ bilden.

Beweis. Einem Unterschema $X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ mit Hilbertpolynom $P(m)$ entspricht der Hilbertpunkt $[X]_m \in \mathcal{G}$ zu dem Quotienten

$$\text{Sym}^m(V^\vee) \cong \mathbb{C}^{(m)}[x_0, \dots, x_r] \xrightarrow{\text{res}_X} H^0(X, \mathcal{O}_X(m)),$$

wobei res_X die Restriktion der Monome von \mathbb{P}^r nach X bezeichnet. Diese Aussage zusammen mit der Bemerkung nach Definition 1 liefert das Gewünschte. \square

Die so induzierte Basis von $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ nennen wir **B-monomiell**, da sie die Projektion von Monomen aus $x_i \in B$ sind.

1.2 Gewichtete Basen und Filtrationen

Wir haben mit einer 1-Parameter-Untergruppe λ angefangen und dazu eine diagonalisierende Basis mit zugehörigen $w_i \in \mathbb{Z}$ gewählt. Wir hätten auch umgekehrt mit einer $B = \{x_0, \dots, x_r\} \subset V$ mit Gewichten $w_i \in \mathbb{Z}$, $\sum_i w_i = 0$ *anfangen* können, und eine 1-Param.-Untergruppe durch

$$\lambda: \mathbb{C}^\times \rightarrow G, \quad t \mapsto \text{diag}(t^{w_0}, \dots, t^{w_r})$$

definieren können. Dies kann man verallgemeinern:

Definition 4: (Gewichtete Basis, gewichtete Filtration)

Sei wie bisher $V = \mathbb{C}^{r+1}$.

- (i) Eine **Q-gewichtete Basis** B ist eine Basis x_0, \dots, x_r von V zusammen mit **Gewichten** $w_i \in \mathbb{Q}$. Wir notieren $w_B := \sum_{i=0}^r w_i$.
- (ii) Eine **gewichtete Filtration** F ist eine Familie $(U_w)_{w \in \mathbb{Q}}$ von Unterräumen mit $w \leq w' \Rightarrow U_w \subseteq U_{w'}$, $U_w = \{0\}$ für $w \ll 0$ und $U_w = V$ für $w \gg 0$.
- (iii) Die durch eine Q-gewichtete Basis bestimmte gewichtete Filtration F_B ist

$$U_w := \langle \{x_i \mid w_i \leq w\} \rangle_{\mathbb{C}}.$$

- (iv) B ist **kompatibel** mit einer Filtration F , falls $F_B = F$; in diesem Falle definieren wir $w_F := w_B$ (dies ist unabhängig von der Wahl von B).

Eine gewichtete Filtration F ist nach Definition bestimmt durch die Unterräume U_w an den endlich vielen Stellen $w \in \mathbb{Q}$, an denen die Dimension springt. Indem wir ggf. bei größeren Sprüngen das Gewicht wiederholen und (beliebige) Zwischenräume einfügen, können wir F darstellen als

$$F: \mathbb{C}^{r+1} = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \dots \supseteq V_r \supseteq \{0\} \quad \rightsquigarrow \quad U_w = \bigcup_{w_i \leq w} V_i.$$

$$w_0 \geq w_1 \geq \dots \geq w_r$$

Wir können so Gewichte für beliebige Vektoren $x \in V$ definieren:

$$w(x) = w_i \quad :\iff \quad x \in V_i \setminus V_{i+1}.$$

Lemma 5 Sei F eine gewichtete Filtration auf V .

- (i) F bestimmt eine gewichtete Filtration F_m auf $\text{Sym}^m(V^\vee)$:
 - Wähle eine zu F kompatible Q-gewichtete Basis B .
 - Gewichte die Monombasis B_m via $w(x_0^{m_0} \dots x_r^{m_r}) = \sum_{i=0}^r m_i w_i$.
 - Die Filtration $F_m := F_{B_m}$ ist unabhängig von der Wahl von B .
- (ii) Ist $f: V \rightarrow H$ eine surjektive lineare Abbildung, so definiert $w(h) := \min \{ w(x) \mid x \in f^{-1}(h) \}$ eine gewichtete Filtration von H .

Beweis. (i) Es ist die Unabhängigkeit zu zeigen. Seien B, B' gewichtete Basen mit $F = F_B = F_{B'}$ (also gleichen Gewichten w_i). Nach Konstruktion ist

$$w(x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r}) = \sum_{i=0}^r m_i w_i = w(x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r}) =: q$$

Da $\langle \{x_i \mid w_i \leq w\} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \{x'_i \mid w_i \leq w\} \rangle_{\mathbb{C}}$, können wir $x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r}$ aus Monomen in den x_i vom Gewicht $\leq q$ darstellen. Dies zeigt „ $F_{B'_m} \subseteq F_{B_m}$ “; vertauscht man die Rollen von B und B' , erhält man die andere Inklusion.

(ii) Zunächst ist das Minimum wohldefiniert und $\in \mathbb{Q}$, da $w(x)$ nur endlich viele Werte annimmt. Es ist noch zu zeigen, dass $U := \{h \in H \mid w(h) \leq w\}$ ein Unterraum von H ist:

- $0 \in U$ und $a \cdot U \subseteq U$ ($a \in \mathbb{C}$) sind klar.
- Seien $h, h' \in U$, $x, x' \in V$ Urbilder, für die das Minimum angenommen wird, oBdA sei $w(x') \leq w(x) \leq w$. Dann ist $x + x'$ ein Urbild von $h + h'$, welches Gewicht $\leq w(x)$ hat, d.h.

$$w(h + h') \leq w(x + x') \leq w(x) \leq w$$

und $h + h' \in U$. □

Dies ermöglicht uns folgende Konstruktion:

- Fixiere wie bisher eine gewichteten Filtration F von V .
- Lemma 5(i) erweitert dies zu F_m auf $\text{Sym}^m(V^\vee)$.
- Mit der Surjektion res_X projizieren wir diese auf $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ (Lemma 5(ii)). Diese bezeichnen wir mit $F_{X,m}$ oder ebenfalls F_m (Verwechslungsgefahr!).
- Für eine mit $F_{X,m}$ kompatible Basis B^0 von $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ schreiben wir

$$w_F(m) := w_{F_{X,m}} = w_{B^0} = \sum_{f \in B^0} w_f$$

(genau wie in Definition 4).

Für eine feste gewichtete Filtration F werden wir das Verhalten der Funktion $w_F(m)$ in Abhängigkeit von m genauer untersuchen.

1.3 Das numerische Kriterium für Hilbertpunkte

Wir erinnern an die Notation aus dem numerischen Kriterium. Bezeichne $\lambda: \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{GL}(W) \circlearrowleft W$ eine 1-Parameter-Untergruppe, so gilt für $x \in W$ bezüglich λ

$$\begin{aligned} x \text{ ist stabil} & \iff \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \text{ divergiert,} \\ x \text{ ist semistabil} & \iff \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \cdot x \neq 0. \end{aligned}$$

Satz 6: (Numerisches Kriterium für Hilbertpunkte)

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^r$ ein Unterschema mit Hilbertpolynom P und $[X]_m \in \mathcal{H}$ der dazugehörige m -te Hilbertpunkt. Dann sind äquivalent:

- (i) $[X]_m$ ist (semi)stabil bzgl. der Operation von $G = \mathrm{SL}_{r+1}(\mathbb{C})$.
- (ii) $[X]_m$ ist (semi)stabil für jede 1-Parameter-Untergruppe $\lambda: \mathbb{C}^\times \rightarrow G$.
- (iii) Für jede gewichtete Basis B von \mathbb{C}^{r+1} existiert eine B -monomielle Basis B^0 von $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ mit $w_{B^0} < 0$ (\leq).
- (iv) Für jede gewichtete Filtration F von V mit Gewichten w_i und Mittelwert $\alpha = \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^r w_i$ gilt $w_F(m) < m\alpha P(m)$ (\leq).

Beweis. (i) \Leftrightarrow (ii): Dies ist genau die Aussage des numerischen Kriteriums [HM98, S. 200f, insb. Theorem 4.17].

(ii) \Leftrightarrow (iii): [Nach ACG11, Lemma XIV.3.1] Sei B eine gewichtete Basis von \mathbb{C}^{r+1} und λ die dazu assoziierte 1-Parameter-Untergruppe.

- Nach Lemma 2 hat die induzierte Operation auf W ebenfalls Diagonalgestalt.
- Nach Lemma 3 entsprechen die B -monomiellen Basen den nicht in $[X]_m$ verschwindenden Plücker-Koordinaten Z .

Wir betrachten nur die „stabile“ Behauptung, die semistabile Version geht analog. Für eine beliebige Teilmenge v_1, \dots, v_p dargestellt als

$$v_i = \sum_j Y_{ij} \in \mathrm{Sym}^m(V^\vee)$$

ist die Wirkung von λ nach linearer Algebra gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda(t) \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_p) &= (\lambda(t) \cdot v_1) \wedge \dots \wedge (\lambda(t) \cdot v_p) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_p} t^{\sum_{i=0}^r w(Y_{ij_i})} \cdot Y_{1j_1} \wedge \dots \wedge Y_{pj_p}. \end{aligned}$$

„ \Rightarrow “: Ist $[X]_m$ stabil, so divergiert $\lambda(t)Z$ für $t \rightarrow 0$, d.h. für eine Kombination von j_1, \dots, j_p muss der Exponent $\sum_{i=0}^r w(Y_{ij_i})$ negativ und $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \neq 0$ sein. Die Basis $B^0 = \{\varphi_m(Y_{1j_1}), \dots, \varphi_m(Y_{pj_p})\}$ hat dann Gewicht < 0 .

„ \Leftarrow “: Ist $B^0 = \{b_0, \dots, b_p\}$ eine Basis von $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ mit negativem Gewicht, und sind $v_1, \dots, v_p \in \mathrm{Sym}^m(V^\vee)$ Urbilder mit $w(v_i) = w(b_i)$. Dann ist für eine beliebige Wahl der j_i

$$\sum_{i=0}^r w(v_i) \leq \sum_{i=0}^r \max_j w(Y_{ij}) \leq \sum_{i=0}^r w(b_i) < 0.$$

und $\lambda(t)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p)$ divergiert für $t \rightarrow 0$.

(iii) \Leftrightarrow (iv): Sei F eine gewichtete Filtration von V und B eine beliebige kompatible \mathbb{Q} -gewichtete Basis (mit den „ F -Gewichten“). Sei $\beta \in \mathbb{N}$ ein gemeinsamer Nenner von $w_0 - \alpha, \dots, w_r - \alpha$ und definiere die „ B -Gewichte“

$$w'_i := \beta \cdot (w_i - \alpha) \in \mathbb{Z}.$$

Die w'_i sind ganzzahlig mit $\sum_{i=0}^r w'_i = 0$; umgekehrt entsteht jede so gewichtete Basis aus einem F . Ein Monom $Y = x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r}$ hat B -Gewicht

$$\sum_{i=0}^r m_i w'_i = \sum_{i=0}^r m_i \beta (w_i - \alpha) = \beta \left(\sum_{i=0}^r m_i w_i \right) - m \alpha \beta.$$

Das Gewicht einer beliebigen B -monomiellen Basis B^0 von $H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ unterscheidet also von $\beta w_F(m)$ durch

$$m \alpha \beta \cdot |B^0| = \beta m \alpha \cdot h^0(X, \mathcal{O}_X(m)) = \beta m \alpha P(m).$$

Nach Kürzen von β ist die Ungleichung aus (iv) ($w_F(m) - m \alpha P(m) < 0$) gleichbedeutend mit der aus (iii). \square

Beispiel 7 Sei $X = \{P_1, \dots, P_d\} \subset \mathbb{P}^r$ eine Menge von d verschiedenen Punkten. $HP_X(m) = d$ (konstant). Aus dem numerischen Kriterium folgt, dass $[X]_m$ genau dann stabil ist, wenn in jedem echten Unterraum $L < \mathbb{P}^r$ der Dimension s höchstens $d \cdot \frac{r+1}{s+1}$ der Punkte liegen.

1.4 Asymptotische Hilbert-Stabilität

Wie im Beweis von Satz 6 sei $\alpha := \alpha_F$ das mittlere Gewicht einer mit F kompatiblen Basis.

Definition 8: (Hilbert-Stabilität)

Ein Unterschema $X \subset \mathbb{P}^r$ heißt

- (i) **F -Hilbert-(semi)stabil**, falls für $m \gg 0$ die Ungleichung aus Satz 6(iv) für dieses F gilt,
- (ii) **Hilbert-(semi)stabil** schlechthin, falls sie für *alle* F gelten, d.h. $[X]_m$ ein stabiler Punkt von \mathcal{H} ist.

Wir entwickeln ein Kriterium dafür, F -Hilbert-stabil zu sein. Schlüssel dafür ist folgendes Theorem:

Satz 9: ([Mum04, §2, Proposition 2.1 + 2.6])

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^r$ ein Unterschema von Dimension n .

(i) $w_F(m)$ ist ein numerisches Polynom vom Grad $n + 1$, d.h. für $m \gg 0$ ist

$$w_F(m) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k m^k, \quad a_{n+1} \neq 0.$$

(ii) Es gibt Konstanten C, M (nur von $P(m)$ abhängig) und e_F , sodass

$$\left| w_F(m) - e_F \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} \right| < C m^n, \quad m \geq M.$$

Es wird uns ein Anliegen sein, die Konstante e_F abzuschätzen, denn wir haben das nützliche

Satz 10: (Asymptotisches numerisches Kriterium)

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^r$ ein Unterschema von Dimension n und Grad d .

(i) Wir haben die Implikationen

$$\begin{aligned} e_F < \alpha_F(n+1)d &\implies X \text{ ist } F\text{-Hilbert-stabil,} \\ e_F > \alpha_F(n+1)d &\implies X \text{ ist } F\text{-Hilbert-instabil} \end{aligned}$$

(d.h. nicht F -Hilbert-semistabil).

(ii) Fixiere ein Unterschema $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ und angenommen es gibt ein $\delta > 0$ mit

$$e_F < \alpha_F(n+1)d - \delta$$

für alle gewichteten Filtrationen F assoziiert zu Hilbertpunkten $X \in \mathcal{S}$. Dann gibt es ein $M = M(\mathcal{S})$, sodass $[X]_m$ stabil ist für alle $m \geq M$, $X \in \mathcal{S}$.

Beweis (Skizze). Wir haben

$$P(m) = h^0(X, \mathcal{O}_X(m)) = \frac{dm^n}{n!} + O(m^{n-1}),$$

das numerische Kriterium Satz 6(iv) interessiert sich für die Größe von

$$m\alpha_F P(m) = d(n+1)\alpha_F \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} < e_F \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{\text{Satz 9}}{\approx} w_F(m) \quad \text{mod } O(m^n).$$

Für $m \gg 0$ tritt das gewünschte Verhalten auf. Der zweite Teil ist eine gleichmäßige beschränkte Variante des Arguments [vgl. HM98, Lemma 4.26]. \square

2 Giesekers Kriterium

Von hier an sei $X = C$ eine glatte Kurve, projektiv eingebettet mittels eines sehr amplen Geradenbündels \mathcal{L} . Wir haben also

$$V = H^0(C, \mathcal{L}) \cong \mathbb{C}^{r+1}, \quad C \hookrightarrow \mathbb{P}^r = \mathbb{P}(V)$$

mit festem Hilbertpolynom $P(m) = dm + (1 - g)$ (also r , d und g fix).

2.1 Die d -Invarianten einer Filtration

Stellen wir wie in Abschnitt 1.2 eine gewichtete Filtration F von V als Folge

$$V = V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_r \supseteq \{0\}$$

dar. Ein Unterraum $U = \langle f_0, \dots, f_l \rangle_C \subseteq V$ definiert ein Linearsystem $\vartheta = \mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}^r$ und bestimmt eine rationale Abbildung (außerhalb der Basispunkte)

$$\varphi_\vartheta: C \dashrightarrow \mathbb{P}(U), \quad P \mapsto (f_0 : \cdots : f_l).$$

Definition 11: ((Ko)Grade d_j)

Den Grad des Bildes $C' = \overline{\text{Im}(\varphi_\vartheta)} \subseteq \mathbb{P}(U) \subseteq \mathbb{P}^r$ für $U = V_j$ bezeichnen wir als **Grad** von V_j d_j . Der **Kograd** ist $e_j := d - d_j$.

Wir fixieren nun eine Folge ganzer Zahlen

$$0 = j_0 < j_1 < \cdots < j_h = r$$

und Zahlen $p, n \in \mathbb{N}$, welche wir später festlegen wollen. Betrachte die Unterräume

$$W_{k,i}^n := \text{Sym}^n(V) \cdot \text{Sym}^{n(p-i)}(V_{j_k}) \cdot \text{Sym}^{ni}(V_{j_{k+1}}) \subseteq \text{Sym}^m(V) \quad m = n(p+1),$$

wobei $k \in \{0, \dots, h-1\}$, $i \in \{0, \dots, p\}$. Wir können diese Unterräume via

$$\text{res}_C: \text{Sym}^m V \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(m))$$

zu Unterräumen $U_{k,i}^n \subseteq H^0(\mathcal{O}_C(m))$ projizieren.

Lemma 12: Eine Formel für $\dim U_{k,i}^n$

Für jede Wahl von P und p gibt es ein N unabhängig von C oder F , sodass

$$\dim(U_{k,i}^n) = n(d + (p-i)d_{j_k} + id_{j_{k+1}}) - g + 1$$

für alle $n \geq N$, k und i erfüllt ist.

Beweis (Skizze). Wir zeigen nur die punktweise Aussage, die gleichmäßige Version kann man daraus ableiten [siehe HM98, Exercise 4.28].

Sei $\mathcal{L}_j \in \text{Pic}(C)$ das Geradenbündel erzeugt von den Schnitten aus V_j .

$$\mathcal{M}_{k,i} = \mathcal{L} \otimes (\mathcal{L}_{j_k})^{\otimes(p-i)} \otimes (\mathcal{L}_{j_{k+1}})^{\otimes i}$$

ist ein Geradenbündel vom Grad $d + (p - i)d_{j_k} + id_{j_{k+1}}$. Nach Konstruktion können wir $U_{k,i}^n$ als Unterraum von $H^0(C, \mathcal{M}_{k,i}^{\otimes n})$ auffassen, also als Linearsystem. Da \mathcal{L} (nach Konstruktion) sehr ampel ist, schränkt sich der Raum $W_{k,i}^1$ zu einem sehr ampelen Linearsystem des vollständigen Linearsystems $H^0(C, \mathcal{M}_{k,i})$ ein.

Daraus kann man ableiten, dass die Einschränkungabbildung

$$\varphi_{k,i}^n: W_{k,i}^n \rightarrow H^0(C, (\mathcal{M}_{k,i})^{\otimes n})$$

surjektiv ist. Sei $\mathcal{N} := (\mathcal{M}_{k,i})^{\otimes n}$, dann gilt für $n \geq 2g$

$$\deg(\omega_C \otimes \mathcal{N}^\vee) = 2g - 2 - n \cdot \deg \mathcal{M}_{k,i} < 0 \quad \implies \quad h^0(C, \omega_C \otimes \mathcal{N}^\vee) = 0.$$

Aus dem Satz von Riemann-Roch für glatte Kurven folgt die gewünschte Gleichung

$$\dim U_{k,i}^n = h^0(C, \mathcal{N}) \stackrel{\text{RR}}{=} \deg(\mathcal{N}) - g + 1 = n(d + (p - i)d_{j_k} + id_{j_{k+1}}) - g + 1. \quad \square$$

2.2 Das Kriterium von Gieseker

Lemma 13 Sei $T_{k,i}$ eine Filtration eines Vektorraums T mit $\dim T_{k,i} = D_{k,i}$, sodass

$$\begin{aligned} & T_{0,0} \supseteq T_{0,1} \supseteq \cdots \supseteq T_{0,p-1} \supseteq T_{0,p} \\ & = T_{1,0} \supseteq T_{1,1} \supseteq \cdots \supseteq T_{1,p-1} \supseteq T_{1,p} \\ & = \dots \\ & = T_{h-1,0} \supseteq T_{h-1,1} \supseteq \cdots \supseteq T_{h-1,p-1} \supseteq T_{h-1,p} \\ & = T_{h,0}, \end{aligned}$$

sodass Elemente von $T_{k,i}$ Gewicht $\leq R_{k,i}$ haben. Sei B eine kompatible Basis von T , dann ist

$$\begin{aligned} w_B & \leq \left(\sum_{k=0}^{h-1} \sum_{i=0}^{p-1} (D_{k,i} - D_{k,i+1}) R_{k,i} \right) + D_{h,0} R_{h,0} \\ & = D_{0,0} R_{0,0} + \left(\sum_{k=0}^{h-1} \sum_{i=1}^p D_{k,i} (R_{k,i} - R_{k,i+1}) \right). \end{aligned}$$

Beweis. Direktes Nachrechnen. □

Für $T_{k,i} = U_{k,i}^n$ haben wir konkret die Zahlenwerte aus Lemma 12

$$\begin{aligned} D_{k,i} & = n(d + (p - i)d_{j_k} + id_{j_{k+1}}) - g + 1 \\ R_{k,i} & = n(w_0 + (p - i)w_{j_k} + iw_{j_{k+1}}). \end{aligned}$$

Dies zusammen mit $d_0 = d$ liefert uns eine Abschätzung

$$\begin{aligned} w_F(n(p+1)) & \leq (n(p+1)d - g + 1)(n(p+1)w_0) \\ & \quad + \sum_{k=0}^{h-1} \left(\sum_{i=1}^p n(d + (p - i)d_{j_k} + id_{j_{k+1}}) - g + 1 \right) \cdot n(w_{j_{k+1}} - w_{j_k}) \end{aligned}$$

Eine lange, technische Rechnung, welche $n \gg p \gg 0$ nutzt, liefert schließlich:

Für e_F , den Leitkoeffizienten des numerischen Polynoms

$$w_F(m) = \frac{e_F}{(r+1)!} m^{n+1} + O(m^n),$$

haben wir die Abschätzung

$$e_F \leq 2dw_0 + \sum_{k=0}^{h-1} (d_{j_k} + d_{j_{k+1}})(w_{j_{k+1}} - w_{j_k}).$$

Wir können dies weiter vereinfachen: Zunächst ist

$$d_{j_k} + d_{j_{k+1}} = (d - e_{j_k}) + (d - e_{j_{k+1}}) = -(e_{j_k} + e_{j_{k+1}} - 2d).$$

Wenn wir die Annahme $w_r = 0$ machen (Translation der Gewichte), ist

$$w_0 = \sum_{i=0}^{h-1} (w_{j_k} - w_{j_{k+1}}).$$

Zusammen liefert dies (beachte den Vorzeichenwechsel bei den w_{j_k} !)

$$e_F \leq \sum_{k=0}^{h-1} (e_{j_k} + e_{j_{k+1}})(w_{j_k} - w_{j_{k+1}}).$$

Wir wollen ab jetzt die Gewichte **normieren**, und zwar derart, dass

$$w_F = \sum_{i=0}^r w_i = 1, \quad w_r = 0,$$

dies lässt die Stabilität bzgl. F unverändert (wie im Beweis von Satz 6(iii) \Leftrightarrow (iv)). Um den folgenden Satz formulieren zu können, definieren wir noch

$$\varepsilon_F := \min_{0=j_0 < \dots < j_h=r} \left(\sum_{k=0}^{h-1} (e_{j_k} + e_{j_{k+1}})(w_{j_k} - w_{j_{k+1}}) \right).$$

Satz 14: (Kriterium von Gieseker)

Sei $C \subset \mathbb{P}^r$ eine glatte Kurve vom Grad d und Geschlecht g .

- (i) Für eine Filtrate F mit $w_r = 0$ ist C F -Hilbert-stabil, falls $\varepsilon_F < 2d\alpha_F$.
- (ii) Seien ε_i obere Schranken für den Kograd e_i jedes Unterraums $V_j \leq V$ von Kodimension i und

$$\varepsilon_C := \max_{\substack{w_0 \geq \dots \geq w_r = 0 \\ w_0 + \dots + w_r = 1}} \left(\min_{0=j_0 < \dots < j_{h-1} = r} \sum_{k=0}^{h-1} (\varepsilon_{j_k} + \varepsilon_{k_{k+1}})(w_{j_k} - w_{j_{k+1}}) \right). \quad (1)$$

Dann ist C Hilbert-stabil, falls $\varepsilon_C < \frac{2d}{r+1}$.

- (iii) Fixiere ein Unterschema $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}_{P,r}$, sodass alle Kurven in \mathcal{S} glatt sind. Falls es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$\varepsilon_C < \frac{2d}{r+1} - \delta \quad \forall C \in \mathcal{S},$$

so gibt es ein M derart, dass $[C]_m$ stabil ist für alle $m \geq M$, $C \in \mathcal{S}$.

Beweis. Der erste Teil folgt sofort aus dem asymptotischen numerischen Kriterium (Satz 10) angewendet auf die soeben erlangte Abschätzung. Der Rest nutzt ebenfalls die gleichmäßige Variante von (Satz 10), Details finden sich in [HM98, Lemma 4.30]

□

3 Die Stabilität glatter Kurven

Satz 15: (Stabilität glatter Kurven)

Sei C eine glatte Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$, eingebettet in \mathbb{P}^r mittels eines vollständigen Linearsystems \mathcal{L} vom Grad $d \geq 2g$. Dann ist C Hilbert-stabil. Man kann sogar ein M wählen, sodass $[C]_m$ stabil ist für alle $m \geq M$ und alle C .

Beweis. Schritt 1: Visualisiere Giesekers Kriterium.

Fixiere zunächst eine Folge von Zahlen ε_i, w_i ($i = 0, \dots, r$) aus Satz 14(ii). Wir können diese Tupel in der Ebene auftragen:

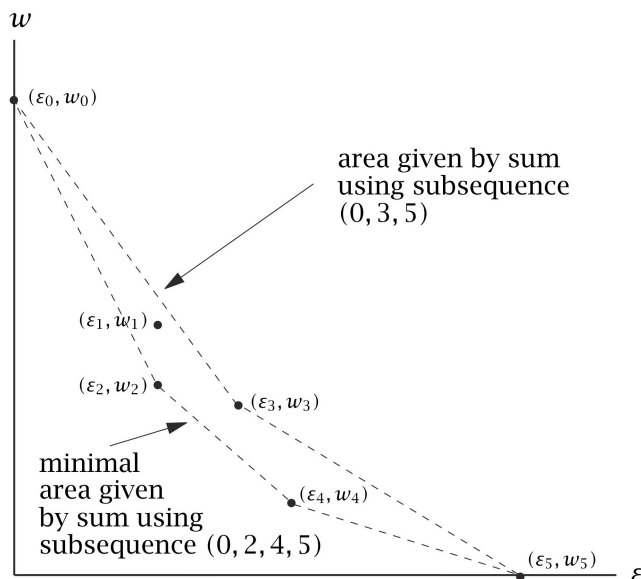


Abbildung 1: Beispielhafte Tupel (ε_i, w_i) . [HM98, Figure (4.35)]

Betrachte für jede Folge von Indizes $\mathbf{j} \hat{=} (0 = j_0 < \dots < j_h = r)$ die Summe

$$S(\mathbf{j}) = \sum_{k=0}^{h-1} (\varepsilon_{j_k} + \varepsilon_{j_{k+1}})(w_{j_k} - w_{j_{k+1}}).$$

Aus Abbildung 1 ist ersichtlich, dass $\frac{1}{2}S(\mathbf{j})$ gerade der Flächeninhalt des Polygons eingeschlossen durch die Koordinatenachsen und die Streckenzüge $(\varepsilon_{j_k}, w_{j_k})$ nach $(\varepsilon_{j_{k+1}}, w_{j_{k+1}})$ ist. Sei E die untere konvexe Einhüllende der $(\varepsilon_{j_k}, w_{j_k})$ und A die von E und den Achsen eingeschlossene Fläche, so ist

$$\min_{\mathbf{j}} S(\mathbf{j}) = 2 \cdot \text{Vol}(A).$$

Schritt 2: Wir lassen die w_i variieren.

Wir halten nun die ε_i fest und variieren die Gewichte w_i . Falls $(\varepsilon_i, w_i) \notin E$, so können wir w_i verkleinern, ohne $\min_{\mathbf{j}} S(\mathbf{j})$ zu verändern. Dies bedeutet, dass das

Maximum in (1) über die normalisierten (!) Gewichte genau dann eintritt, wenn *alle* Punkte (ε_i, w_i) auf E liegen. Insbesondere wird das Minimum für die „vollständige“ Sequenz $\mathbf{j} = (0, 1, \dots, r)$ angenommen.

Schritt 3: Wir können $\varepsilon_i = \frac{d}{r+1} \cdot i$ wählen.

Ist D ein beliebiger Divisor auf C , so folgt aus dem Satz von Riemann-Roch und dem [Satz von Clifford](#) die Abschätzung

$$h^0(D) - 1 \begin{cases} = \deg(D) - g & \text{falls } \ell(K_C - D) = 0, \\ \leq \frac{\deg(D)}{2} & \text{falls } \ell(K_C - D) > 0. \end{cases}$$

Dies können wir in der $(d, r = h^0 - 1)$ -Ebene anschaulich darstellen:

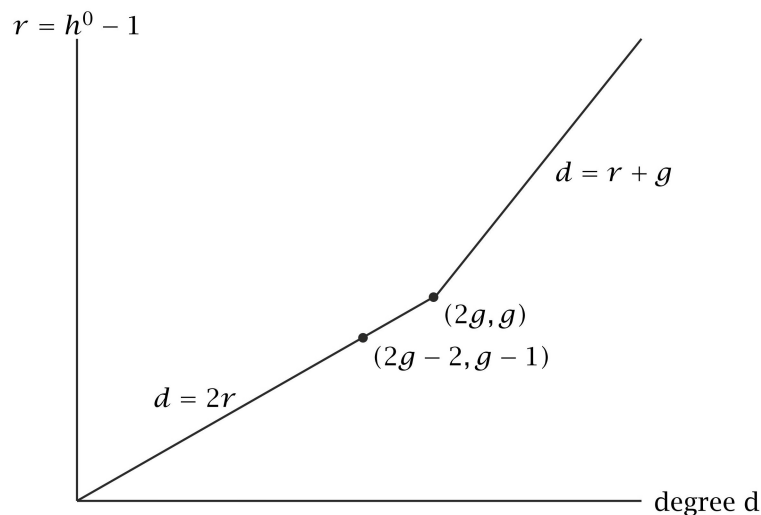


Abbildung 2: Clifford-Schranke und RR-Gerade. [HM98, Figure (4.36)]

Wir wenden dies auf den Punkt $(d_i, r - i) = (d - e_i, r - i)$ an, korrespondierend zum Linearsystem V_i der Kodimension i in $V = H^0(C, \mathcal{L})$. Das vollständige Linearsystem V_0 entspricht dem Punkt (d, r) . Nach Voraussetzung des Satzes ist $d \geq 2g$, d.h. $h^0(\omega_C \otimes \mathcal{L}^\vee) = 0$ und (d, r) liegt auf der RR-Geraden und oberhalb/auf der Clifford-Schranke. Somit ist die Steigung der Strecke von $(d - e_i, r - i)$ nach (d, r) gerade

$$\frac{r+1}{d} \leq \frac{r - (r - i)}{d - (d - e_i)} = \frac{i}{e_i}.$$

Umstellen liefert wie behauptet $\varepsilon_i := \frac{d}{r+1} \geq e_i$.

Schritt 4: Giesekers Kriterium anwenden.

Wir setzen die bisherigen Schritte zusammen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_C &\stackrel{\text{Schritt 2}}{\leq} \sum_{j=0}^{r-1} (\varepsilon_j + \varepsilon_{j+1})(w_j - w_{j+1}) \\
 &\stackrel{\text{Schritt 3}}{\leq} \frac{d}{r+1} \sum_{j=0}^{r-1} (j + (j+1))(w_j - w_{j+1}) \\
 &\stackrel{w_r \equiv 0}{=} \frac{d}{r+1} \left(w_0 + \sum_{j=1}^{r-1} (2w_j) \right) = \frac{d}{r+1} \left(-w_0 + 2 \sum_{j=0}^r w_j \right).
 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind die Gewichte normiert, summieren sich also zu 1 auf. Außerdem ist w_0 das größte Gewicht, erfüllt also $w_0 \geq \alpha_F = \frac{1}{r+1}$. Wir sehen

$$\varepsilon_C \leq \frac{d}{r+1} (2 - w_0) \leq \frac{2d}{r+1} - \underbrace{\frac{d}{(r+1)^2}}_{=\delta > 0}.$$

Wir können also Giesekers Kriterium (Satz 14, in der gleichmäßigen Fassung) anwenden und gewinnen! \square

Korollar 16: (Stabilität der plurikanonischen Einbettung)

Sei C eine (abstrakte) glatte Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$. Dann ist $\omega_C^{\otimes n}$ für $n \geq 3$ sehr ampel und die **plurikanonische Einbettung**

$$C \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(C, \omega_C^{\otimes n})) = \mathbb{P}^r$$

liefert einen stabilen Punkt $[C]_m$ im Hilbertschema $\mathcal{H}_{d,g,r}$, wobei $d = n(2g-2)$, $r = (2n-1)(g-1) - 1$.

Beweis. $\omega_C^{\otimes n}$ ist sehr ampel nach dem ersten Vortrag oder [Hul12, Abschnitt 6.6] und $d = n(2g-2) \geq 2g$. Somit kann Satz 15 angewendet werden. \square

Literatur

- [HM98] Joe Harris und Ian Morrison. [Moduli of Curves](#). Springer-Verlag New York, 1. Juli 1998. 369 S. ISBN: 0387984380.
- [ACG11] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba und Phillip A. Griffiths. [Geometry of Algebraic Curves](#). Springer-Verlag GmbH, 10. März 2011. 963 S. ISBN: 9783540693925.
- [Mum04] David Mumford. „Stability of Projective Varieties“. In: [Selected Papers](#). Springer New York, 2004, S. 95–170. DOI: [10.1007/978-1-4757-4265-7_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4265-7_7).
- [Hul12] Klaus Hulek. [Elementare Algebraische Geometrie: Grundlegende Begriffe und Techniken mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen](#). de. 2. Aufl. Aufbaukurs Mathematik. Vieweg+Teubner Verlag, 2012. ISBN: 9783834819642. DOI: [10.1007/978-3-8348-2348-9](https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2348-9). URL: <https://www.springer.com/de/book/9783834819642> (besucht am 12. 01. 2021).